Die Transporterscheinungen in zylindrischen Entladungen bei Anwesenheit magnetischer Felder

Von J. FRIEDRICH, H. SCHIRMER und I. STOBER

Osram-Studiengesellschaft Berlin

(Z. Naturforschg. **14 a**, 1047—1056 [1959]; eingegangen am 29. Mai 1959)

Es wird die vollständige Theorie der Transporterscheinungen in zylindrischen Plasmen unter Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes — bei Anwesenheit eines longitudinalen Magnetfeldes — dargestellt. Unter dieser allgemeinen Voraussetzung ist die Entwicklung bis zur zweiten Näherung gelungen. Bei Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes oder eines Longitudinalfeldes allein können allgemeine Ausdrücke für die n-te Näherung angegeben werden.

Die Ergebnisse zeigen, daß die innere Verwandtschaft zwischen den entsprechenden Ausdrücken für ein LORENTZ-Gas (LORENTZ-Plasma) und ein Plasma auch hier zwanglos erhalten bleibt.

Die exakte Theorie der Transporterscheinungen nicht vollständig ionisierter Plasmen (bei Anwesenheit eines schwachen elektrischen Feldes) ist in früheren Arbeiten dargestellt worden [1, 2]. Die beschriebene Theorie umfaßt auch den Einfluß der Wechselwirkung der Elektronen untereinander durch Entwicklung nach SONINEschen Polynomen entsprechend dem Vorgehen von CHAPMAN und COWLING [3] und insbesondere LANDSHOFF [4]. Die Untersuchungen der genannten Autoren enthalten bereits auch Ansätze zur Berücksichtigung des Einflusses des Eigenmagnetfeldes, das in Entladungen sehr hoher Stromdichte bedeutungsvoll wird. Der Einfluß des Eigenmagnetfeldes und eines zur Führung der Entladung zusätzlich angelegten longitudinalen Magnetfeldes auf ein LORENTZ-Plasma („LORENTZ-Gas") ist kürzlich betrachtet worden [5]. Dieser Ansatz wird im folgenden auf den Fall eines Plasmas (unter Berücksichtigung der Elektronenwechselwirkung) übertragen. Dabei läßt sich die Theorie des Plasmas auf eine Form bringen, in der — wie schon früher bemerkt [2] — jeweils Determinantenausdrücke den Integralausdrücken des LORENTZ-Plasmas entsprechen.

1. Die Behandlung der Boltzmann-Gleichung eines Plasmas mit Magnetfeld bei bestehender Zylindersymmetrie

Die BOLTZMANN-Gleichung eines Plasmas mit Magnetfeld lautet unter der Voraussetzung der Stationarität

$$(\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1)\cdot\frac{\partial(n_e f)}{\partial\mathfrak{v}}+\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial(n_e f)}{\partial\mathfrak{r}}=n_a n_e\Big[v\iint(f'-f)\,a\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\varepsilon+\frac{n_i}{n_a}\,v\iint(f'-f)\,a\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\varepsilon+\frac{n_e}{n_a}\iiint(f'f_e'-f f_e)\,g\,b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\mathfrak{v}_e\Big] \quad (1)$$

mit $\mathrm{d}\mathfrak{v}_e$ als Volumenelement im Geschwindigkeitsraum der Elektronen, ferner

$$\mathfrak{X}=\frac{e}{m}\mathfrak{E} \quad (2)$$

als elektrische und

$$\mathfrak{X}_1=\mathfrak{v}\times\vec{\omega} \quad (3)$$

als magnetische Beschleunigung. Sind H_i die Komponenten des magnetischen Feldvektors $\mathfrak{H}$, dann ist

$$\omega_i=\frac{e}{m}\frac{H_i}{c}\quad(i=1,2,3) \quad (4)$$

die jeweilige Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) eines Elektrons um die i-Richtung.

Zur Lösung der Gl. (1) wird als Geschwindigkeitsverteilungsfunktion f der stoßenden Elektronen angesetzt

$$f=f_0\left(1+\mathfrak{v}\cdot\vec{\psi}(v)\right) \quad (5)$$

mit f_0 als ungestörte BOLTZMANN-Funktion; entspre-

[1] H. SCHIRMER u. J. FRIEDRICH, Z. Phys. **151**, 174, 375 [1958].
[2] H. SCHIRMER u. J. FRIEDRICH, Z. Phys. **153**, 563 [1959].
[3] S. CHAPMAN and T. G. COWLING, The Mathematical Theory of non-uniform Gases, University Press, Cambridge 1953.
[4] R. LANDSHOFF, Phys. Rev. **76**, 904 [1949]; **82**, 442 [1951].
[5] H. SCHIRMER, Z. Naturforschg. **14 a**, 318 [1959].

chende Ausdrücke werden angesetzt für $f' = f(\mathfrak{v}')$ nach dem Stoß und für f_e, f_e' als Geschwindigkeitsverteilungen des gestoßenen Elektrons vor und nach dem Stoß. Damit ergibt sich aus (1)

$$- \frac{2}{w^2} \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{v} f_0 + (\mathfrak{v} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{\psi} f_0 - \left[\left(\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{v^2}{w^2} \right) \right] \frac{1}{T} \left(- \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} \right) \cdot \mathfrak{v} f_0 \tag{6}$$

$$= - n_a \left[(\mathfrak{v} \cdot \vec{\psi})\, v \left(Q_a(v) + \frac{n_i}{n_a} Q_i(v) \right) f_0 + \frac{n_e}{n_a} \mathfrak{v} \cdot \vec{J}_e \right]$$

mit $$J_{ei} = - \frac{1}{v^2} \iiint f_0 f_{0e} [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}' \psi_i(v') + \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}_e' \psi_i(v_e') - \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} \psi_i(v) - \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}_e \psi_i(v_e)] \cdot g\, b\, db\, d\varepsilon\, d\mathfrak{v}_e \tag{7}$$

$(i = 1, 2, 3)$ als Komponenten von $\vec{J}_e$.

Die „Transportquerschnitte" $Q_a(v)$, $Q_i(v)$ der Atome und Ionen gegenüber Elektronen sowie die Elektronenwechselwirkungsintegrale (7) sind in früheren Arbeiten besprochen worden [1].

Wegen $(\mathfrak{v} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{\psi} = \mathfrak{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\psi})$ ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{T} \left(- \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} \right), \quad \mathfrak{E} = \frac{2}{w^2} \mathfrak{X} + \left[\frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial T} + 1 \right] \mathfrak{D} \tag{8}$$

aus (6) das Gleichungssystem

$$\mathfrak{E} f_0 - \mathfrak{D} \left(\frac{5}{2} - \frac{v^2}{w^2} \right) f_0 = (\vec{\omega} \times \vec{\psi}) f_0 + \frac{v}{\Lambda(v)} \vec{\psi} f_0 + n_e \vec{J}_e ; \tag{9}$$

hierbei ist

$$\Lambda(v) = \frac{1}{n_a \left(Q_a(v) + \frac{n_i}{n_a} Q_i(v) \right)} \tag{10}$$

die früher [6] definierte freie Weglänge der Elektronen in einem LORENTZ-Plasma ohne Magnetfeldeinwirkung. Mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{\psi}(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{p}_\nu S_\nu \left(\frac{v^2}{w^2} \right) \tag{11}$$

für die Entwicklung der Lösungsfunktion nach SONINEschen Polynomen $S_\nu(v^2/w^2)$ und gemäß der weiteren Behandlung der Gl. (9) entsprechend dem früher beschriebenen Vorgehen [1, 2] ergibt sich aus Gl. (9) das (unendliche) lineare Gleichungssystem [7]

$$\mathfrak{E}\, \delta_{0\varkappa} - \frac{5}{2} \mathfrak{D}\, \delta_{1\varkappa} = \frac{2}{3} \frac{\vec{\omega} \times \mathfrak{p}_\varkappa}{B(\varkappa+1, \frac{3}{2})} + \frac{2}{3} w\, n_a \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{p}_\nu I_{\nu\varkappa} ; \tag{12}$$

hierbei sind die $I_{\nu\varkappa}$ die Integrale

$$I_{\nu\varkappa} = I^a_{\nu\varkappa} + \frac{n_i}{n_a} I^i_{\nu\varkappa} + \frac{n_e}{n_a} I^e_{\nu\varkappa} \tag{12 a}$$

gemäß den Gln. (18) bis (21) und (28) in Teil I der zitierten Arbeit [1]. $\delta_{\nu\varkappa}$ ist das KRONECKER-Symbol und $B(p, q)$ die EULERsche Beta-Funktion (mit der Fakultät durch die Relation $B(p+1, q+1) = \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!}$ verbunden).

Für jede Komponente aufgeschrieben, werden durch Gl. (12) insgesamt drei lineare Gleichungssysteme dargestellt, aus denen die $p_{i\nu}$, die Komponenten der $\mathfrak{p}_\nu$, zu bestimmen sind. Die unendlichen Gleichungssysteme sind wie früher durch Abbrechen nach einer Nummer n näherungsweise zu lösen. Aus den $p_{i0}^{(n)}$ ergeben sich dann nach den bekannten Relationen [1, 2, 5] die Komponenten der Stromdichte, $j_{ei}^{(n)}$, aus $p_{i0}^{(n)}$ und $p_{i1}^{(n)}$ die Komponenten des Wärmestroms der Elektronen, $W_{ei}^{(n)}$, in n-ter Näherung.

Werden für die Darstellung der Komponentenschreibweise Zylinderkoordinaten gewählt, dann durchläuft i die Indizes x, r, φ. Der Übergang auf Zylinderkoordinaten bringt keinerlei Schwierigkeiten mit sich; er ist früher [5] schon bei Aufstellung der BOLTZMANN-Gleichung vorgenommen worden.

Aus den auf diese Weise aus (12) entstehenden drei linearen Gleichungssystemen ließen sich alle interessierenden Fälle ablesen.

Für eine im folgenden betrachtete zylindrische Entladung ist die Nebenbedingung für die Stromlosigkeit in radialer Richtung

$$j_{er} = 0 \tag{13}$$

von Bedeutung [6], die durch $p_{r0} = 0$ erfüllt wird und die die in E_r enthaltene Zwangsbeschleunigung

[6] H. SCHIRMER, Z. Phys. **142**, 1, 116 [1955].

[7] Im Falle eines vollständig ionisierten Plasmas ($n_a = 0$) tritt hier und in den folgenden Entwicklungen einfach formal n_i an die Stelle des n_a, wie aus (12) und (12 a) und auch aus der BOLTZMANN-Gleichung (1) leicht zu ersehen; die Integrale $I_{\nu\varkappa}$ enthalten dann die $I^a_{\nu\varkappa}$ nicht mehr.

$(e/m)\, G_r$ festlegt. Ferner verschwinden wegen der Zylindersymmetrie die φ-Komponenten von $\mathfrak{G}$ und $\partial T/\partial \mathfrak{x}$; es ist also $E_\varphi = 0$, $D_\varphi = 0$ zu setzen. Schließlich gilt für die Radialkomponente des Vektors $\vec{\omega}$ $\omega_r = 0$, da ein Magnetfeld in radialer Richtung nicht auftritt.

Auf Grund dieser Bedingungen ergeben sich nun aus (12) die drei Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{I}): && E_x\,\delta_{0\varkappa} - \frac{5}{2} D_x\,\delta_{1\varkappa} = -\frac{2}{3}\frac{\omega_\varphi}{B(\varkappa+1,\frac{3}{2})}\,p_{r\varkappa}^{(n)} + \frac{2}{3} w\, n_{\mathrm{a}} \sum_{\nu=0}^{n} p_{x\nu}^{(n)}\, I_{\nu\varkappa},\\
&(\mathrm{II}): && E_r\,\delta_{0\varkappa} - \frac{5}{2} D_r\,\delta_{1\varkappa} = \frac{2}{3}\frac{\omega_\varphi\, p_{x\varkappa}^{(n)} - \omega_x\, p_{\varphi\varkappa}^{(n)}}{B(\varkappa+1,\frac{3}{2})} + \frac{2}{3} w\, n_{\mathrm{a}} \sum_{\nu=0}^{n} p_{r\nu}^{(n)}\, I_{\nu\varkappa},\\
&(\mathrm{III}): && 0 = \frac{2}{3}\frac{\omega_x}{B(\varkappa+1,\frac{3}{2})}\,p_{r\varkappa}^{(n)} + \frac{2}{3} w\, n_{\mathrm{a}} \sum_{\nu=0}^{n} p_{\varphi\nu}^{(n)}\, I_{\nu\varkappa},
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Die Lösungen dieser Gleichungen bestimmen die gesuchten Transportkoeffizienten in allgemeinster Form unter der Voraussetzung eines Eigenmagnetfeldes ($\omega_\varphi \neq 0$) und eines zusätzlichen longitudinalen Magnetfeldes ($\omega_x \neq 0$).

2. Stromdichte und Wärmestrom einer Entladung mit Eigenmagnetfeld bzw. mit longitudinalem Magnetfeld allein

Wird ein Eigenmagnetfeld bzw. ein longitudinales Magnetfeld allein vorausgesetzt, dann lassen sich Stromdichte und Wärmestrom der Elektronen für die n-te Näherung – mit Berücksichtigung der Nebenbedingung (13) – in geschlossener Form angeben.

a) Eigenmagnetfeld allein wirkend ($\omega_\varphi \neq 0$, $\omega_x = 0$)

In diesem Fall verschwindet (III) identisch wegen $\omega_x = 0$. Die Multiplikation von (II) mit der imaginären Einheit i und die Addition (I) $+\,i\cdot$(II) ergibt mit $D_x + i\,D_r = D$, $E_x + i\,E_r = E$, $p_{x\nu}^{(n)} + i\,p_{r\nu}^{(n)} = p_\nu^{(n)}$ das System

$$\frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_{\mathrm{a}}}\left(E\,\delta_{0\varkappa} - \frac{5}{2} D\,\delta_{1\varkappa}\right) = -\frac{i\,\omega_\varphi\,p_{\cdot\varkappa}^{(n)}}{w\,n_{\mathrm{a}}\,B(\varkappa+1,\frac{3}{2})} + \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{(n)}\, I_{\nu\varkappa} \qquad (15)$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned}
p_0^{(n)} &= \frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_{\mathrm{a}}}\left(E\,\frac{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}}{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}} + \frac{5}{2} D\,\frac{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{10}}{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}}\right),\\
p_1^{(n)} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_{\mathrm{a}}}\left(E\,\frac{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{10}}{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}} + \frac{5}{2} D\,\frac{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{11}}{\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}}\right);
\end{aligned}\right\}(16)$$

hierin ist $\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}$ die (symmetrische) Koeffizientendeterminante von (15) mit den Elementen

$$I_{\nu\varkappa} + i\,\frac{\omega_\varphi}{w\,n_{\mathrm{a}}\,B(\varkappa+1,\frac{3}{2})}\,\delta_{\nu\varkappa}, \qquad (17)$$

$$(\nu, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}$, $\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{10}$, $\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{11}$ sind die entsprechenden Unterdeterminanten. Die formale Separation von Realteil $\mathfrak{Re}$ und Imaginärteil $\mathfrak{Im}$ dieser Determinanten ergibt schließlich unter Beachtung von (13)

$$\begin{aligned}
j_{\mathrm{e}x\,\omega_\varphi}^{(n)} = e n_{\mathrm{e}} \Bigg\{ &\left[b_{\mathrm{e}\omega_\varphi}^{(n)} G_x + \left(D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}^{(n)} \left[\frac{T}{n_{\mathrm{e}}}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial T} + 1\right] + D_{\mathrm{eTh}\omega_\varphi}^{(n)} \right) \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) \right] \left[1 + \left(\frac{\mathfrak{Im}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right)}{\mathfrak{Re}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right)} \right)^2 \right] \\
&+ D_{\mathrm{e}\omega_\varphi}^{(n)} \left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) \left(-\frac{\mathfrak{Im}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right)}{\mathfrak{Re}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right)} \right) + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right) \right] \left[-\frac{5}{2}\,\frac{\mathfrak{Im}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right) + \mathfrak{Im}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{10}\right)}{\mathfrak{Re}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right)} + \frac{\mathfrak{Im}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right)}{\mathfrak{Re}\left(\Delta_{\omega_\varphi}^{(n)}{}_{00}\right)}\, A_{\omega_\varphi}^{(n)} \right] \Bigg\},
\end{aligned} \qquad (18)$$

$$
\begin{aligned}
W^{(n)}_{\mathrm{e}x\omega_\varphi} = {} & \lambda^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) + n_\mathrm{e} k\, T \left\{\left[b^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi} G_x \right.\right.\\
& + \left(D^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi}\left[\frac{T}{n_\mathrm{e}}\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial T} + 1\right] + D^{(n)}_{\mathrm{e\,Th}\,\omega_\varphi}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg]\left[A^{(n)}_{\omega_\varphi} + \frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\cdot\frac{5}{2}\,\frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\right]\\
& + D^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi}\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(-\frac{5}{2}\,\frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\right)\left(-\frac{5}{2}\,\frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)} + \frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\,A^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)\right.\\
& + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\left(\frac{25}{4}\left[\frac{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}0011\right)\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)}{\left(\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)\right)^2} - \frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + 2\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}11\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\right]\right.\\
& \left.\left.\left. + \frac{5}{2}\,\frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\,A^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
W^{(n)}_{\mathrm{e}r\omega_\varphi} = {} & \lambda^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right) - n_\mathrm{e} k\, T \left\{\left[b^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi} G_x \right.\right.\\
& + \left(D^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi}\left[\frac{T}{n_\mathrm{e}}\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial T} + 1\right] + D^{(n)}_{\mathrm{e\,Th}\,\omega_\varphi}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg]\left[-\frac{5}{2}\,\frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)} + \frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\,A^{(n)}_{\omega_\varphi}\right]\\
& + D^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi}\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{25}{4}\left[\frac{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}0011\right)\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)}{\left(\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)\right)^2} - \frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + 2\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}11\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\right]\right.\\
& \left.\left. + 2\,A^{(n)}_{\omega_\varphi}\frac{5}{2}\,\frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right) + \Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)} - \left[A^{(n)}_{\omega_\varphi}\right]^2\frac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\right)\right\};
\end{aligned}
\tag{20}
$$

hierbei sind

$$
\bar{l}^{(n)}_{\sigma\,\omega_\varphi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{9}{4}\,\frac{1}{n_\mathrm{a}\left[\dfrac{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)} + \dfrac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\right]},
\tag{21}
$$

$$
\bar{l}^{(n)}_{\lambda\,\omega_\varphi} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{9}{4}\,\frac{25}{4}\,\frac{1 + \dfrac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}11\right) - \left|\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)\right|^2}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}0011\right)\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)}}{n_\mathrm{a}\left[\dfrac{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}0011\right)} + \dfrac{\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)\Im\mathfrak{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right)\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}0011\right)}\right]}
\tag{22}
$$

die „mittleren freien Weglängen“ für elektrische Leitfähigkeit σ_{ω_φ} und Wärmeleitfähigkeit λ_{ω_φ},

$$
b^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi} = \frac{2}{3}\,\frac{e}{m}\,\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}\,\bar{l}^{(n)}_{\sigma\,\omega_\varphi},
\tag{23}
$$

$$
D^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi} = \frac{1}{3}\,\bar{v}\,\bar{l}^{(n)}_{\sigma\,\omega_\varphi},
\tag{24}
$$

$$
D^{(n)}_{\mathrm{e\,Th}\,\omega_\varphi} = D^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi}\left(A^{(n)}_{\omega_\varphi} - \frac{5}{2}\right),
\tag{25}
$$

$$
A^{(n)}_{\omega_\varphi} = \frac{5}{2}\left(1 + \frac{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}10\right)}{\Re\mathfrak{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}00\right)}\right)
\tag{26}
$$

Beweglichkeit, Diffusion und Thermodiffusion der Elektronen; $A^{(n)}_{\omega_\varphi}$ ist eine schon früher erwähnte Kopplungsgröße[2, 5, 6],

$$
\lambda^{(n)}_{\mathrm{e}\,\omega_\varphi} = \frac{4}{9}\,n_\mathrm{e}\left(\frac{3}{2}\,k\right)\bar{v}\,\bar{l}^{(n)}_{\lambda\,\omega_\varphi}
\tag{27}
$$

die Elektronenwärmeleitfähigkeit.

b) Longitudinales Magnetfeld allein wirkend ($\omega_x \neq 0$, $\omega_\varphi = 0$)

In diesem Fall wird in (15) das Gleichungssystem (I) magnetfeldfrei. Da jetzt weder (II) noch (III) $p_{x\nu}^{(n)}$ enthalten, werden die x-Komponenten der Stromdichte und des Wärmestroms von einem longitudinalen Magnetfeld unter den vorliegenden Bedingungen nicht beeinflußt[5], d. h.

$$j_{\mathrm{e}x\omega_x}^{(n)} = j_{\mathrm{e}x}^{(n)}, \tag{28}$$

$$W_{\mathrm{e}x\omega_x}^{(n)} = W_{\mathrm{e}x}^{(n)}; \tag{29}$$

$j_{\mathrm{e}x}^{(n)}$ und $W_{\mathrm{e}x}^{(n)}$ sind bereits früher[2] angegeben worden.

Die radiale Komponente des Wärmestroms ergibt sich durch eine dem Fall a) analoge Rechnung, nach der in (14) nun (II) $+ i\cdot$(III) addiert wird. Aus dem entstehenden Gleichungssystem

$$\frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\left(E_r\,\delta_{0\varkappa} - \frac{5}{2}D_r\,\delta_{1\varkappa}\right) = \frac{i\,\omega_x\,q_\varkappa^{(n)}}{w\,n_\mathrm{a}\,B(\varkappa+1,\frac{3}{2})} + \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu^{(n)}\,I_{\nu\varkappa} \tag{30}$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

mit $q_\nu^{(n)} = p_{r\nu}^{(n)} + i\,p_{\varphi\nu}^{(n)}$, ergeben sich die Größen $q_0^{(n)}$ und $q_1^{(n)}$ in ganz analoger Form wie in (16), nur erscheinen jetzt E_r und D_r an Stelle von E und D und ω_x an Stelle von ω_φ.

Mithin wird

$$\left.\begin{aligned} q_0^{(n)} &= \frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\left(E_r\frac{\Delta_{\omega_x 00}^{(n)}}{\Delta_{\omega_x}^{(n)}} + D_r\frac{\Delta_{\omega_x 10}^{(n)}}{\Delta_{\omega_x}^{(n)}}\right),\\ q_1^{(n)} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\left(E_r\frac{\Delta_{\omega_x 10}^{(n)}}{\Delta_{\omega_x}^{(n)}} + D_r\frac{\Delta_{\omega_x 11}^{(n)}}{\Delta_{\omega_x}^{(n)}}\right); \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

die Determinanten $\Delta_{\omega_x}^{(n)}$ enthalten [anal. dem Fall a)] die Elemente

$$I_{\nu\varkappa} + i\,\frac{\omega_x}{w\,n_\mathrm{a}\,B(\varkappa+1,\frac{3}{2})}\,\delta_{\nu\varkappa}, \tag{32}$$

$$(\nu, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Unter Beachtung von (13) wird nun

$$W_{\mathrm{e}r\omega_x}^{(n)} = \lambda_{\mathrm{e}\omega_x}^{(n)}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{33}$$

mit $\lambda_{\mathrm{e}\omega_x}^{(n)}$ und $\bar{l}_{\lambda\omega_x}^{(n)}$ entsprechend (27) und (22).

c) Verschwindendes Magnetfeld $\omega_x = 0$, $\omega_\varphi = 0$

Mit verschwindendem Magnetfeld gehen die Determinanten gemäß (17) und (32) in die des magnetfeldfreien Falles der früheren Entwicklungen[1, 2] über, die Definitionen (21) bis (27) verhalten sich entsprechend. Die Endformeln (18), (19), (20) und (33) umfassen mithin die entsprechenden Ausdrücke ohne Magnetfeld vollständig.

3. Die Transportkoeffizienten eines Plasmas im Falle gleichzeitigen Vorhandenseins des Eigenmagnetfeldes und eines zusätzlichen Longitudinalfeldes

Unter der Voraussetzung $\omega_x \neq 0$, $\omega_\varphi \neq 0$ läßt sich das diesen Fall umfassende Gleichungssystem (14) nicht in einfacher Weise in so allgemeiner Form behandeln wie in den Fällen des Abschnitts 2. Im folgenden wird daher, bezugnehmend auf die Konvergenzbetrachtungen der früheren Arbeiten[1, 2], lediglich die nullte bis zweite Näherung explizit dargestellt. Die zweite Näherung stimmt in dem in Frage stehenden Bereich der Elektronenstreuung, für ein Lorentz-Gas berechnet, mit den exakten Werten praktisch überein. Dies ist auch für das allgemeine Plasma – mit Elektronenwechselwirkung – zu erwarten.

a) 0. Näherung

In nullter Näherung ergeben sich mit $n = 0$ aus (14) die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,E_x &= -\frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,\omega_\varphi\,p_{r0}^{(0)} + p_{x0}^{(0)}\,I_{00},\\ \frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,E_r &= \frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\left(\omega_\varphi\,p_{x0}^{(0)} - \omega_x\,p_{\varphi 0}^{(0)}\right)\\ &\quad + p_{r0}^{(0)}\,I_{00},\\ 0 &= \frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,\omega_x\,p_{r0}^{(0)} + p_{\varphi 0}^{(0)}\,I_{00}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Hieraus lassen sich Stromdichte und Wärmestrom unschwer berechnen. Es wird unter Beachtung von (13)

$$\left.\begin{aligned} j_{\mathrm{e}x\omega_x\omega_\varphi}^{(0)} &= e\,n_\mathrm{e}\left\{b_\mathrm{e}^{(0)}\,G_x + D_\mathrm{e}^{(0)}\left[\frac{T}{n_\mathrm{e}}\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial T} + 1\right]\cdot\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right\},\\ W_{\mathrm{e}x\omega_x\omega_\varphi}^{(0)} &= \frac{k\,T}{e}\,A^{(0)}\,j_{\mathrm{e}x}^{(0)}, \quad W_{\mathrm{e}r\omega_x\omega_\varphi}^{(0)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

(35) läßt erkennen, daß $\bar{l}^{(0)}_{\sigma\omega} = \bar{l}^{(0)}_{\sigma}$ sowie $A^{(0)}_{\omega} = A^{(0)}$ unabhängig vom Magnetfeld sind, während $\bar{l}^{(0)}_{\lambda\omega}$ verschwindet[2]:

$$\bar{l}^{(0)}_{\lambda\omega} = \bar{l}^{(0)}_{\lambda} = 0 .$$

b) 1. Näherung

Für die erste Näherung liegt das System der 6 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_a}\,E_x &= -\frac{2}{5}\,\Omega_\varphi\,p^{(1)}_{r0} + p^{(1)}_{x0}\,I_{00} + p^{(1)}_{x1}\,I_{10},\\
-\frac{15}{4}\frac{1}{w\,n_a}\,D_x &= -\Omega_\varphi\,p^{(1)}_{r1} + p^{(1)}_{x0}\,I_{10} + p^{(1)}_{x1}\,I_{11},\\
\frac{3}{2}\frac{1}{w\,n_a}\,E_r &= \frac{2}{5}\,(\Omega_\varphi\,p^{(1)}_{x0} - \Omega_x\,p^{(1)}_{\varphi 0}) + p^{(1)}_{r0}\,I_{00} + p^{(1)}_{r1}\,I_{10},\\
-\frac{15}{4}\frac{1}{w\,n_a}\,D_r &= \Omega_\varphi\,p^{(1)}_{x1} - \Omega_x\,p^{(1)}_{\varphi 1} + p^{(1)}_{r0}\,I_{10} + p^{(1)}_{r1}\,I_{11},\\
0 &= \frac{2}{5}\,\Omega_x\,p^{(1)}_{r0} + p^{(1)}_{\varphi 0}\,I_{00} + p^{(1)}_{\varphi 1}\,I_{10},\\
0 &= \Omega_x\,p^{(1)}_{r1} + p^{(1)}_{\varphi 0}\,I_{10} + p^{(1)}_{\varphi 1}\,I_{11}
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

vor; hierbei ist

$$\Omega_i = \frac{15}{4}\,\frac{\omega_i}{w\,n_a} \quad [\mathrm{cm}^2] \quad (i = x, \varphi) \tag{37}$$

gesetzt[8].

Die Lösung dieses linearen Systems ergibt – wiederum unter Anwendung von (13) –

$$j^{(1)}_{e x \omega_x \omega_\varphi} = e\,n_e \left\{\left[b^{(1)}_{e\omega}\,G_x + \left(D^{(1)}_{e\omega}\left[\frac{T}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial T} + 1\right] + D^{(1)}_{e\mathrm{Th}\omega}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]\left[1 + \Omega_x^2\,\frac{I_{00}}{I_{11}\,\Delta^{(1)}} + \Omega_\varphi^2\,\frac{1}{I_{11}{}^2}\right]\right.$$
$$\left. + D^{(1)}_{e\omega}\,\frac{\Omega_\varphi}{I_{11}}\left(\frac{5}{2} - A^{(1)}\right)\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\Omega_\varphi}{I_{11}} + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]\right\}, \tag{38}$$

$$W^{(1)}_{e x \omega_x \omega_\varphi} = \lambda^{(1)}_{e\omega}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$
$$+ n_e\,k\,T\left\{\left[b^{(1)}_{e\omega}\,G_x + \left(D^{(1)}_{e\omega}\left[\frac{T}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial T} + 1\right] + D^{(1)}_{e\mathrm{Th}\omega}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]\left[A^{(1)} + \Omega_x^2\,A^{(1)}\,\frac{I_{00}}{I_{11}\,\Delta^{(1)}} + \Omega_\varphi^2\,\frac{5}{2}\,\frac{1}{I_{11}{}^2}\right]\right.$$
$$+ D^{(1)}_{e\omega}\left[\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\Omega_x^2\,\frac{I_{00}}{I_{11}\,\Delta^{(1)}}\left[\frac{25}{4}\,\frac{I_{00}}{I_{11}} - \left(A^{(1)} - \frac{5}{2}\right)^2\right] - \Omega_\varphi^2\,\frac{5}{2}\,\frac{1}{I_{11}{}^2}\left(A^{(1)} - \frac{5}{2}\right)\right)\right. \tag{39}$$
$$\left.\left. + \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\Omega_\varphi\,\frac{5}{2}\,\frac{1}{I_{11}}\left(\frac{5}{2}\,\frac{I_{00}}{I_{11}} + A^{(1)} - \frac{5}{2}\right)\right]\right\},$$

$$W^{(1)}_{e r \omega_x \omega_\varphi} = \lambda^{(1)}_{e\omega}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$
$$- n_e\,k\,T\left\{\left[b^{(1)}_{e\omega}\,G_x + \left(D^{(1)}_{e\omega}\left[\frac{T}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial T} + 1\right] + D^{(1)}_{e\mathrm{Th}\omega}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]\Omega_\varphi\,\frac{1}{I_{11}}\left(A^{(1)} - \frac{5}{2}\right)\right. \tag{40}$$
$$\left. + D^{(1)}_{e\omega}\,\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Omega_\varphi\left[\frac{25}{4}\,\frac{I_{00}}{I_{11}{}^2} - \frac{1}{I_{11}}\left(A^{(1)} - \frac{5}{2}\right)^2\right]\right\}.$$

In der ersten Näherung für Stromdichte und Wärmestrom, in deren Formeln rechts der Index ω zur Abkürzung für das Auftreten eines Eigenmagnetfeldes ω_φ und eines zusätzlichen longitudinalen Magnetfeldes ω_x gewählt wurde, treten ω_x und ω_φ nicht nur explizit in Ω_x, Ω_φ, sondern auch implizit in der Beweglichkeit $b_{e\omega}$, im Diffusionskoeffizienten $D_{e\omega}$ und im Thermodiffusionskoeffizienten $D_{e\mathrm{Th}\omega}$ auf. Die in ihnen enthaltenen Definitionen

$$\bar{l}^{(1)}_{\sigma\omega} = \frac{1}{1 + (\Omega_x{}^2 + \Omega_\varphi{}^2)\,\dfrac{I_{00}}{I_{11}\,\Delta^{(1)}}}\,\bar{l}^{(1)}_{\sigma}, \tag{41}$$

$$\bar{l}^{(1)}_{\lambda\omega} = \frac{1}{1 + (\Omega_x{}^2 + \Omega_\varphi{}^2)\,\dfrac{I_{00}}{I_{11}\,\Delta^{(1)}}}\,\bar{l}_{\lambda}{}^{(1)}, \tag{42}$$

[8] Ist das Plasma vollständig ionisiert ($n_a = 0$), so ist an Stelle des n_a die Zahl der Ionen n_i zu setzen; siehe Anm. [7].

mit $\bar{l}_\sigma^{(1)}$ und $\bar{l}_\lambda^{(1)}$ gemäß früheren Definitionen[2], stimmen überein mit (21) und (22) (Eigenmagnetfeld), falls dort Ω_φ^2 durch $(\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2)$ ersetzt wird. Auch die Definition (26) für $A_\omega^{(1)}$ bleibt erhalten; es ist $A_\omega^{(1)} = A^{(1)}$.

Für $\omega_x = 0$ oder $\omega_\varphi = 0$ gehen die Ausdrücke (38) bis (40) der 1. Näherung in die entsprechenden Gln. (18) bis (20) oder (28), (29), (33) mit $n=1$ über.

c) 2. Näherung

Für die zweite Näherung besteht das zu lösende Gleichungssystem aus den 9 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{3}{2}\,\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,E_x &= -\frac{2}{5}\,\Omega_\varphi\,p_{r0}^{(2)} + p_{x0}^{(2)} I_{00} + p_{x1}^{(2)} I_{10} + p_{x2}^{(2)} I_{20}\,,\\
-\frac{15}{4}\,\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,D_x &= -\Omega_\varphi\,p_{r1}^{(2)} + p_{x0}^{(2)} I_{10} + p_{x1}^{(2)} I_{11} + p_{x2}^{(2)} I_{21}\,,\\
0 &= -\frac{7}{4}\,\Omega_\varphi\,p_{r2}^{(2)} + p_{x0}^{(2)} I_{20} + p_{x1}^{(2)} I_{21} + p_{x2}^{(2)} I_{22}\,,\\
\frac{3}{2}\,\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,E_r &= \frac{2}{5}\left(\Omega_\varphi\,p_{x0}^{(2)} - \Omega_x\,p_{\varphi 0}^{(2)}\right) + p_{r0}^{(2)} I_{00} + p_{r1}^{(2)} I_{10} + p_{r2}^{(2)} I_{20}\,,\\
-\frac{15}{4}\,\frac{1}{w\,n_\mathrm{a}}\,D_r &= \Omega_\varphi\,p_{x1}^{(2)} - \Omega_x\,p_{\varphi 1}^{(2)} + p_{r0}^{(2)} I_{10} + p_{r1}^{(2)} I_{11} + p_{r2}^{(2)} I_{21}\,,\\
0 &= \frac{7}{4}\left(\Omega_\varphi\,p_{x2}^{(2)} - \Omega_x\,p_{\varphi 2}^{(2)}\right) + p_{r0}^{(2)} I_{20} + p_{r1}^{(2)} I_{21} + p_{r2}^{(2)} I_{22}\,,\\
0 &= \frac{2}{5}\,\Omega_x\,p_{r0}^{(2)} + p_{\varphi 0}^{(2)} I_{00} + p_{\varphi 1}^{(2)} I_{10} + p_{\varphi 2}^{(2)} I_{20}\,,\\
0 &= \Omega_x\,p_{r1}^{(2)} + p_{\varphi 0}^{(2)} I_{10} + p_{\varphi 1}^{(2)} I_{11} + p_{\varphi 2}^{(2)} I_{21}\,,\\
0 &= \frac{7}{4}\,\Omega_x\,p_{r2}^{(2)} + p_{\varphi 0}^{(2)} I_{20} + p_{\varphi 1}^{(2)} I_{21} + p_{\varphi 2}^{(2)} I_{22}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Tatsächlich läßt sich auch dieses Gleichungssystem durch geeignete Behandlung lösen. Werden zunächst die ersten und die letzten drei Gleichungen jeweils für sich als lineares System der $p_{x\nu}^{(2)}$ bzw. $p_{\varphi\nu}^{(2)}$ aufgefaßt und deren Lösungen in die mittleren drei Gleichungen eingesetzt, so ergibt sich ein lineares System der $p_{r\nu}^{(2)}$, dessen dreireihige Koeffizientendeterminante $\Theta^{(2)}$ die Elemente

$$I_{\nu\varkappa} + (-1)^{\nu+\varkappa}\,\frac{B(2,\frac{3}{2})\,B(2,\frac{3}{2})}{B(\nu+1,\frac{3}{2})\,B(\varkappa+1,\frac{3}{2})}\,\frac{\Delta_{\nu\varkappa}^{(2)}}{\Delta^{(2)}}\,(\Omega_x^2 + \Omega_\varphi)$$

enthält mit $\Delta^{(2)}$ als Determinante der Elemente $I_{\nu\varkappa}$ $(\nu, \varkappa = 0, 1, 2)$ und $\Delta_{\nu\varkappa}^{(2)}$ als deren zweireihige Unterdeterminanten. Von der Lösung dieses Systems ausgehend, sind nun – unter Beachtung von (13) – Stromdichte und Wärmestrom in zweiter Näherung darstellbar[9]. Wird unter $\Theta_{00}^{(2)}$ der Hauptminor von $\Theta^{(2)}$ verstanden, so wird

$$\begin{aligned}
j_{\mathrm{e}x\omega_x\omega_\varphi}^{(2)} = e\,n_\mathrm{e}\Big\{&\Big[b_{\mathrm{e}\omega}^{(2)}\,G_x + \Big(D_{\mathrm{e}\omega}^{(2)}\Big[\frac{T}{n_\mathrm{e}}\,\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial T} + 1\Big] + D_{\mathrm{eTh}\omega}^{(2)}\Big)\frac{1}{T}\Big(-\frac{\partial T}{\partial x}\Big)\Big]\\
&\cdot\Big[1 + \frac{{\Omega_x}^2}{N^2}\Big(\frac{7}{2}\,\Delta_{00}^{(2)} + \frac{\Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}}\,k_0 + \frac{49}{16}\Big[\frac{I_{00}\,\Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} - 1\Big]\,[{\Omega_x}^2 + {\Omega_\varphi}^2]\Big) + \frac{{\Omega_\varphi}^2}{N^2}\,{k_1}^2\Big]\\
&+ D_{\mathrm{e}\omega}^{(2)}\,\frac{1}{T}\Big(-\frac{\partial T}{\partial x}\Big)\Big[\frac{{\Omega_x}^2}{N^2}\Big(\frac{5}{2} - A_\omega^{(2)}\Big)\frac{7}{4}\,\Theta_{00}^{(2)} - \frac{{\Omega_\varphi}^2}{N^2}\,k_1\,k_{2\omega}\Big] + D_{\mathrm{e}\omega}^{(2)}\,\frac{1}{T}\Big(-\frac{\partial T}{\partial r}\Big)\frac{\Omega_\varphi}{N}\,k_{2\omega}\Big\},
\end{aligned} \qquad (44)$$

[9] Auf eine nähere Beschreibung des Lösungswegs wird in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

$$
\begin{aligned}
W^{(2)}_{\mathrm{e}x\omega_x\omega_\varphi} = {} & \lambda^{(2)}_{\mathrm{e}\omega}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) + n_\mathrm{e}\, k\, T\left\{\left[b^{(2)}_{\mathrm{e}\omega} G_x + \left(D^{(2)}_{\mathrm{e}\omega}\left[\frac{T}{n_\mathrm{e}}\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial T}+1\right] + D^{(2)}_{\mathrm{eTh}\,\omega}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]\right. \\
& \cdot\left[A^{(2)}_\omega + \frac{\Omega_x{}^2}{N^2}\,\frac{5}{2}\left(\frac{7}{2}\Delta^{(2)}_{00} + \frac{7}{4}\Delta^{(2)}_{10} + \frac{\Delta^{(2)}_{00}}{\Delta^{(2)}}\, k_0\left[1+\frac{\Delta^{(2)}_{10}}{\Delta^{(2)}_{00}}\right] + \frac{49}{16}\left[\frac{I_{00}\,\Delta^{(2)}_{00}}{\Delta^{(2)}}\left(1+\frac{\Delta^{(2)}_{10}}{\Delta^{(2)}_{00}}\right)-1\right]\left[\Omega_x{}^2+\Omega_\varphi{}^2\right]\right)\right. \\
& \left. + \frac{\Omega_\varphi{}^2}{N^2}\,\frac{5}{2}\, k_1\left(k_1 + \frac{7}{4} I_{10}\right)\right] + D^{(2)}_{\mathrm{e}\omega}\,\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left[\frac{\Omega_x{}^2}{N^2}\,\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - A^{(2)}_\omega\right)\left(\frac{7}{4}\,\Theta^{(2)}_{00}\left[1+\frac{\Delta^{(2)}_{10}}{\Delta^{(2)}_{00}}\right]\right.\right. \\
& \left.\left. + k_4 - \frac{49}{16}\,\frac{1}{\Delta^{(2)}_{10}}\,\frac{7}{4}\left[I_{00}\, k_1 - \frac{7}{4} I^2_{10}\right]\left[\Omega_x{}^2+\Omega_\varphi{}^2\right]\right) - \frac{\Omega_\varphi{}^2}{N^2}\,\frac{5}{2}\left(k_1 + \frac{7}{4} I_{10}\right) k_{2\omega}\right] \\
& \left. + D^{(2)}_{\mathrm{e}\omega}\,\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)\frac{\Omega_\varphi}{N}\,\frac{5}{2}\left[k_{2\omega}+k_{3\omega}\right]\right\},
\end{aligned} \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
W^{(2)}_{\mathrm{e}r\omega_x\omega_\varphi} = {} & \lambda^{(2)}_{\mathrm{e}\omega}\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right) - n_\mathrm{e}\, k\, T\,\frac{\Omega_\varphi}{N}\left\{\left[b^{(2)}_{\mathrm{e}\omega} G_x + \left(D^{(2)}_{\mathrm{e}\omega}\left[\frac{T}{n_\mathrm{e}}\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial T}+1\right] + D^{(2)}_{\mathrm{eTh}\,\omega}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right] k_{2\omega}\right. \\
& \left. + D^{(2)}_{\mathrm{e}\omega}\,\frac{1}{T}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left[\frac{5}{2} k_{3\omega} + \left(\frac{5}{2} - A^{(2)}_\omega\right) k_{2\omega}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{46}
$$

In diesen Formeln sind zur Abkürzung

$$
\left.
\begin{aligned}
k_0 &= I_{22}\,\Delta^{(2)}_{11} + \frac{7}{2} I_{21}\,\Delta^{(2)}_{21} + \frac{49}{16} I_{11}\,\Delta^{(2)}_{22}, && [\mathrm{cm}^6] \\
k_1 &= I_{22} + \frac{7}{4} I_{11}, && [\mathrm{cm}^2] \\
k_{2\omega} &= \left(A^{(2)}_\omega - \frac{5}{2}\right) k_1 - \frac{35}{8} I_{10}, && [\mathrm{cm}^2] \\
k_{3\omega} &= \left(A^{(2)}_\omega - \frac{5}{2}\right)\frac{7}{4} I_{10} - \frac{35}{8} I_{00} + \frac{5}{2}\,\frac{I_{22}}{N}\left(\Delta^{(2)}_{11} + \frac{7}{4}\Delta^{(2)}_{22}\right), && [\mathrm{cm}^2] \\
k_4 &= \frac{1}{\Delta^{(2)}_{10}}\left(\frac{49}{16}\Delta^{(2)}_{00}\,\Delta^{(2)}_{22} - \frac{7}{4} I_{22}\,\Delta^{(2)} - I_{22}\, k_0\right) && [\mathrm{cm}^4] \\
\text{und} \qquad N &= \Delta^{(2)}_{00} - \frac{7}{4}\left(\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2\right) && [\mathrm{cm}^4]
\end{aligned}
\right\} \tag{47}
$$

gesetzt.

Als freie Weglänge bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit bzw. der Wärmeleitfähigkeit eines Plasmas ergeben sich die Ausdrücke

$$
\bar{l}^{(2)}_{\sigma\omega} = \frac{\left(1 - \dfrac{7}{4}\,\dfrac{\Omega_x^2+\Omega_\varphi^2}{\Delta^{(2)}_{00}}\right)^2}{1 + \dfrac{k_0}{\Delta^{(2)}_{00}\,\Delta^{(2)}}\left(\Omega_x^2+\Omega_\varphi^2\right) + \dfrac{49}{16}\,\dfrac{I_{00}}{\Delta^{(2)}_{00}\,\Delta^{(2)}}\left(\Omega_x^2+\Omega_\varphi^2\right)^2}\;\bar{l}^{(2)}_\sigma, \tag{48}
$$

$$
\bar{l}^{(2)}_{\lambda\omega} = \frac{1 + \dfrac{49}{16}\,\dfrac{\Delta^{(2)}_{22}}{I_{22}\,\Delta^{(2)}}\left(\Omega_x^2+\Omega_\varphi^2\right)}{1 + \dfrac{k_0}{\Delta^{(2)}_{00}\,\Delta^{(2)}}\left(\Omega_x^2+\Omega_\varphi^2\right) + \dfrac{49}{16}\,\dfrac{I_{00}}{\Delta^{(2)}_{00}\,\Delta^{(2)}}\left(\Omega_x^2+\Omega_\varphi^2\right)}\;\bar{l}^{(2)}_\lambda, \tag{49}
$$

mit $\bar{l}_\sigma{}^{(2)}$ und $\bar{l}_\lambda{}^{(2)}$ entsprechend früheren Definitionen [2].

In der zweiten Näherung ist auch die Kopplungsgröße $A^{(2)}_\omega$ vom Magnetfeld abhängig; es ist

$$
A^{(2)}_\omega = \frac{5}{2}\left(1 + \frac{\Delta^{(2)}_{10}}{\Delta^{(2)}_{00} - \dfrac{7}{4}\left(\Omega_x^2+\Omega_\varphi^2\right)}\right) \tag{50}
$$

oder
$$A_{\omega}^{(2)} = \frac{1 - \dfrac{7}{4} \dfrac{\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2}{\Delta_{00}^{(2)} + \Delta_{10}^{(2)}}}{1 - \dfrac{7}{4} \dfrac{\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2}{\Delta_{00}^{(2)}}} \cdot A^{(2)} \tag{51}$$

mit $A^{(2)}$ gemäß früheren Arbeiten [2]. Diese Definitionen sowie alle Formeln der zweiten Näherung lassen sich in den Spezialfällen $\omega_x = 0$ bzw. $\omega_\varphi = 0$ auf die oben angegebenen Formeln (18) bis (22) bzw. (28), (29), (33) zurückführen. Es zeigt sich, daß auch diese (ganz entsprechend der ersten Näherung) aus den allgemeinen Formeln für den Fall des Eigenmagnetfeldes hervorgehen, wenn dort nur (mit $n=2$) Ω_φ^2 durch $(\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2)$ ersetzt wird. Daher ist in diesen Ergebnissen auch der Fall verschwindenden Magnetfelds ($\omega_x = 0$, $\omega_\varphi = 0$) vollständig enthalten.

4. Vergleich mit den Formeln eines Lorentz-Plasmas

Ohne die Berücksichtigung der Elektronenwechselwirkung geht die Boltzmann-Gleichung (1) eines Plasmas über in die Boltzmann-Gleichung eines Lorentz-Gases (Lorentz-Plasmas), für das die Lösungen in analytischer Form angegeben werden können. Dies ist unter Vorgabe des allgemeinen Magnetfeldansatzes (3), (4) kürzlich geschehen [5]. Ein Vergleich der hier vorliegenden Ergebnisse für ein Plasma mit den Resultaten im Falle eines Lorentz-Gases zeigt, daß, ganz entsprechend den früheren Ergebnissen [1, 2], die Form der Gleichungen für Stromdichte- und Wärmestromkomponenten analog erhalten bleibt. Nach wie vor entsprechen den Integralausdrücken des Lorentz-Gases die Determinantenausdrücke des Plasmas.

Für den Fall, daß nur ein Eigenmagnetfeld auftritt ($\omega_x = 0$, $\omega_\varphi \neq 0$), sind die Ergebnisse unmittelbar übertragbar, falls neben der Einführung der Definitionen (23) bis (27) noch

$$(\omega_\varphi \, \bar{\tau}_{\sigma\omega_\varphi}) \, q_{20} \equiv - \frac{\Im\mathrm{m}\left(\Delta^{(1)}_{\omega_\varphi 00}\right)}{\Re\mathrm{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 00}\right)}, \tag{52}$$

$$(\omega_\varphi \, \bar{\tau}_{\sigma\omega_\varphi}) \, q_{22} \equiv - \frac{5}{2} \frac{\Im\mathrm{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 00}\right) + \Im\mathrm{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 10}\right)}{\Re\mathrm{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 00}\right)}, \tag{53}$$

$$(\omega_\varphi \, \bar{\tau}_{\sigma\omega_\varphi}) \, q_{24} \equiv \frac{25}{4} \left[\frac{\Im\mathrm{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi}\right) \Re\mathrm{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 00\,11}\right)}{\left[\Re\mathrm{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 00}\right)\right]^2} - \frac{\Im\mathrm{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 00}\right) + 2\,\Im\mathrm{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 10}\right) + \Im\mathrm{m}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 11}\right)}{\Re\mathrm{e}\left(\Delta^{(n)}_{\omega_\varphi 00}\right)} \right] \tag{54}$$

gesetzt wird. Die Art der Darstellung der Gln. (18) bis (20) läßt den Zusammenhang unmittelbar erkennen.

Die Beziehungen (52) bis (54) bleiben jedoch auch erhalten, wenn neben dem Eigenmagnetfeld noch zusätzlich ein Longitudinalfeld betrachtet wird. Es ist nur – für die zweite Näherung aufgeschrieben – wiederum Ω_φ^2 zu ersetzen durch $(\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2)$. Falls zum Zwecke des Vergleichs mit dem Lorentz-Gas nun noch

$$(\omega_x \, \bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 \, q_{3,-1} \equiv \frac{\Omega_x^2}{N^2} \left(\frac{7}{2} \Delta_{00}^{(2)} + \frac{\Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} k_0 + \frac{49}{16} \left[\frac{I_{00} \, \Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} - 1 \right] [\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2], \tag{55}$$

$$(\omega_x \, \bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 \, q_{31} \equiv \frac{\Omega_x^2}{N^2} \frac{5}{2} \left(\frac{7}{2} \Delta_{00}^{(2)} + \frac{7}{4} \Delta_{10}^{(2)} + \frac{\Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} k_0 \left[1 + \frac{\Delta_{10}^{(2)}}{\Delta_{00}^{(2)}} \right] + \frac{49}{16} \left[\frac{I_{00} \, \Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \left(1 + \frac{\Delta_{10}^{(2)}}{\Delta_{00}^{(2)}} \right) - 1 \right] [\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2] \right), \tag{56}$$

$$\begin{aligned}(\omega_x \, \bar{\tau}_{\sigma\omega})^2 \, q_{33} \equiv \frac{\Omega_x^2}{N^2} \frac{25}{4} \Bigg(& \frac{7}{2} \left[\Delta_{00}^{(2)} + \Delta_{10}^{(2)} \right] - \frac{49}{16} \Delta_{22}^{(2)} + \frac{\Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \, k_0 \left[1 + 2 \frac{\Delta_{10}^{(2)}}{\Delta_{10}^{(2)}} + \frac{\Delta_{11}^{(2)}}{\Delta_{00}^{(2)}} \right] \\ & + \frac{49}{16} \left[\frac{I_{00} \, \Delta_{00}^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \left(1 + 2 \frac{\Delta_{10}^{(2)}}{\Delta_{00}^{(2)}} + \frac{\Delta_{11}^{(2)}}{\Delta_{00}^{(2)}} \right) - 1 \right] [\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2] \end{aligned} \tag{57}$$

gesetzt wird, dann läßt sich der Zusammenhang mit dem Lorentz-Gas auch in den Formeln (44) bis (46) überblicken.

Auch für den Fall des hier angesetzten allgemeinen Magnetfeldes besitzen die Ausdrücke für Plasma und Lorentz-Gas eine vollständig analoge Form.

Die vorliegende Untersuchung hat gezeigt, daß die Transportkoeffizienten eines stationären Plasmas auch für den Fall eines vorgegebenen Magnetfeldes, das sowohl das Eigenmagnetfeld als auch ein Longitudinalfeld umfaßt, berechnet werden können. Die hierfür angegebenen Formeln für die Stromdichte $j_{ex\omega}$ und die Wärmestromkomponenten $W_{ex\omega}$ und $W_{er\omega}$ enthalten den Einfluß der Elektronenwechselwirkung bis zur zweiten Näherung.

Wird Eigenmagnetfeld oder Longitudinalfeld je für sich betrachtet, so lassen sich die Näherungen n-ter Ordnung angeben.

Über eine statistische Beschreibung vollionisierter Plasmen

Von H. J. Kaeppeler

Aus dem Institut für Hochtemperaturforschung der Technischen Hochschule Stuttgart
(Prof. Dr. Kluge, Prof. Dr. Höcker)

(Z. Naturforschg. **14 a**, 1056—1069 [1959]; eingegangen am 13. August 1959)

Ausgehend von der Liouville-Gleichung werden mit Hilfe der Methoden der mathematischen Statistik die makroskopischen Gleichungen für ein vollionisiertes Plasma abgeleitet. Eine allgemeine Hamilton-Funktion für vollionisierte Plasmen, welche auch Strahlungsemission und Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie berücksichtigt, wird aufgestellt und dient zur Ableitung der Maxwellschen Gleichungen für Plasma-Mikrofelder und allgemeiner hydromagnetischer Gleichungen. Durch die Auffassung der Lösung der Wahrscheinlichkeitsdichte in der Liouville-Gleichung als Momentenproblem ergibt sich ferner ein System von Integro-Differentialgleichungen zur Darstellung der eingeführten Partialmomente, die sich gleichzeitig als die Transportgrößen deuten lassen, die in den makroskopischen Gleichungen auftreten. Die Momentengleichungen werden ebenfalls aus der Boltzmann-Gleichung hergeleitet. Die beiden Beschreibungen gehen ineinander über und man erhält gleichzeitig ein lösbares System von partiellen Differentialgleichungen, wenn man von vornherein über die inneren Felder im Plasma mittelt und nur deren kumulative Wirkung berücksichtigt. Dies erscheint erlaubt für den Fall, daß die mittlere freie Weglänge groß gegen den Debye-Radius ist. Es wird diskutiert, warum die so erhaltenen Gleichungen nicht geeignet sind, eine zufriedenstellende Beschreibung mikroskopischer Erscheinungen im Plasma zu geben, jedoch ein in sich geschlossenes System für die Änderung makroskopischer Observablen darstellen, die ferner geeignet sind, Relaxationserscheinungen von Transportgrößen zu erfassen.

Eine der wesentlichen Aufgaben der theoretischen Plasma-Physik ist die Ableitung geeigneter Gleichungen, die eine vollständige Beschreibung makroskopischer, wie auch mikroskopischer Erscheinungen im Plasma erlauben. So z. B. haben Brueckner und Watson [1, 2] makroskopische Gleichungen aus der Boltzmann-Gleichung und Brittin [3] sehr allgemeine hydromagnetische Gleichungen aus der Liouville-Gleichung abgeleitet. In früheren Arbeiten [4–7] von Verf. und Mitarbeitern wurde versucht, gewisse Grundlagen zur statistischen Behandlung von mehrkomponentigen, reagierenden, nicht-isothermen Plasmen auszuarbeiten. Besondere Beachtung wurde dabei der Anwendung und Erweiterung der Gradschen Methode [8] der Lösung der Boltzmann-Gleichung für den Fall von Plasmen [5–7] geschenkt.

Kurz vor Fertigstellung dieser Arbeit wurde dem Verfasser eine Behandlung mehrkomponentiger, nichtreagierender Plasmen von Kolodner [9] bekannt. Diese baut auf der Lösung der Boltzmann-Gleichung nach der Gradschen Methode auf und ist im wesentlichen dasselbe Verfahren, über welches der Verfasser zum ersten Mal auf dem IUTAM Symposium über Grenzschichtforschung [5] im August 1957 berichtete.

Die Lösung der Stoßintegrale für Coulomb-Wechselwirkung ist von Kolodner auf andere Weise durchgeführt worden als wie beim Verf. [7].

Beim Gradschen Verfahren zur Lösung der Boltzmann-Gleichung wird die Wahrscheinlichkeitsdichte in eine Reihe hermitescher Polynome entwickelt, wobei sich die Koeffizienten der Entwicklung als Partial-Momente der zu suchenden Verteilung ergeben, d. h. die Lösung wird als Momentenproblem der ma-

1 K. M. Watson, Phys. Rev. **102,** 12 [1956].
2 K. A. Brueckner u. K. M. Watson, Phys. Rev. **102,** 19 [1956].
3 W. E. Brittin, Phys. Rev. **106,** 843 [1957].
4 H. J. Kaeppeler u. G. Baumann, Mitt. Forsch.-Inst. f. Physik d. Strahlantriebe, Nr. 8, Stuttgart, Nov. 1956.
5 H. J. Kaeppeler u. A. Zaddach, in: Grenzschichtforschung (H. Görtler), Springer-Verlag, Berlin 1958, S. 235.
6 H. J. Kaeppeler, in: Conference on Extremely High Temperatures (H. Fischer u. L. C. Mansur), Wiley & Sons, New York 1958, S. 147.
7 H. J. Kaeppeler, Mitt. Forsch.-Inst. f. Physik d. Strahlantriebe, Nr. 15, Stuttgart, März 1958.
8 H. Grad, Comm. Pure Appl. Math. **2,** 332 [1949].
9 I. I. Kolodner, AEC-Report NYO-7980, Sept. 1957.